II. МАТЕРИАЛЫ ПО ПОДГОТОВКЕ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ ОЛИМПИАДЫ С РЕШЕНИЯМИ

I ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ВАРИАНТ № 1.1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25*мин* позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий? (8 баллов)

2. Укажите все значения *n*, при которых сумма *n* последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,…, начиная с первого, не меньше 84.(8 баллов)

3. Решите уравнение $2^{x+1} = 7 + 2^{2-x}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin x = 3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi/2; \pi/2\right]$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \le \dfrac{2}{x-2\sqrt{x}+1}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}$. (10 баллов)

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$. (12 баллов)

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M\left(\sqrt{3}; 3/4\right)$. (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y = \frac{x+|x|}{x};\ (x-a)^2 = y + a$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно *l*, а другая диагональ основания *AC* образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 45°. (12 баллов)

Решения варианта №1.1

1. Каждый из двух рабочих должен был изготовить по 45 деталей. Второй рабочий приступил к выполнению задания на 25*мин* позднее первого, по трети задания они выполнили к одному времени, а к моменту окончания работы второй рабочий ещё помог первому, изготовив за него 6 деталей. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Решение. Пусть первый рабочий изготавливал x – деталей в час, второй рабочий y – деталей в час, тогда $\frac{15}{x}-\frac{15}{y}=\frac{25}{60}$; $\frac{24}{x}=\frac{36}{y}\Rightarrow\frac{3}{x}-3\cdot\frac{2}{3x}=\frac{1}{12}$; $\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$; $x=12,\ y=18$.

Ответ: 12 и 18 деталей.

2. Укажите все значения n, при которых сумма n последовательных членов арифметической прогрессии 31, 28, 25,…, начиная с первого, не меньше 84.

Решение. $\frac{31+31-3(n-1)}{2}n\ge 84$; $3n^2-65n+168\le 0$;

$n_{1,2}=\frac{65\pm 47}{6}$, $n_1=3,\ \ n_2=18\tfrac{2}{3}$. Ответ: $3\le n\le 18$, $n\in N$.

3. Решите уравнение $2^{x+1}=7+2^{2-x}$.

Решение. $2^{x+1}=7+2^{2-x};\ 2(2^x)^2-7\cdot 2^x-4=0;\ 2(2^x-4)\left(2^x+1/2\right)=0;\ 2^x=4,\ x=2$

Ответ: $x=2$.

4. Решите уравнение $\cos 2x+5\sin x=3$. Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi/2;\pi/2]$.

Решение. $\cos 2x+5\sin x=3\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2=0$; $\sin x=(5\pm 3)/4$.

1) $\sin x=2$ – решений нет. 2) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$. В заданный промежуток входят корни $\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$. Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; $\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$.

5. Решите неравенство $\frac{3}{x-3\sqrt{x}+2}\le\frac{2}{x-2\sqrt{x}+1}$.

Решение. Замена: $\sqrt{x}=t\ge 0,\ x=t^2$.

$$\frac{3}{t^2-3t+2}\le\frac{2}{t^2-2t+1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3}{(t-1)(t-2)}-\frac{2}{(t-1)^2}\le 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3t-3-2t+4}{(t-2)(t-1)^2}\le 0$$

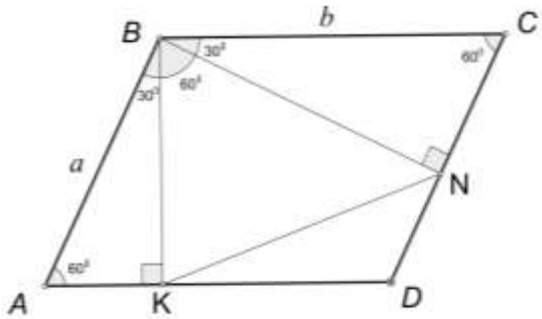
$$\frac{t+1}{(t-2)(t-1)^2}\le 0\quad\overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow}\quad t\in[0;1)\cup(1;2)\Leftrightarrow x\in[0;1)\cup(1;4).$$

Ответ: $x \in [0;1) \cup (1;4)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = 11 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2}$.

Решение. Функция $t = \sqrt{9 - x^2}$ принимает значения $t \in [0;3]$. Рассмотрим функцию $y = 11 - (9 - t^2) - 2t$, определенную на отрезке $[0;3]$. Графиком функции $y = t^2 - 2t + 2$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $t = 1$ и ветвями, направленными вверх. Таким образом, минимальное значение y равно 1, оно достигается в точке $t = 1$, максимальное значение равно 5, оно достигается в точке $t = 3$. Функция $y = f(x)$ принимает значения из отрезка $[1;5]$. Ответ: $E_f = [1;5]$.

7. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28, угол A составляет 60°, BK и BN – высоты параллелограмма, проведенные к прямым, содержащим стороны AD и CD соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если длина отрезка KN равна $\sqrt{39}$.



Решение. Пусть стороны параллелограмма a и b. Найдем высоты BK и BN:

$$BK = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad BN = b\sin 60^\circ = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

В треугольнике KBN угол B равен 60°. По теореме косинусов

$$KN^2 = BK^2 + BN^2 - 2BK \cdot BN\cos 60^\circ = \frac{3a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} - \frac{3ab}{4} = 39 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 - ab = 52.$$

Тогда $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 52, \\ a + b = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 48, \\ b = 14 - a \end{cases}.$

Решая уравнение $a^2 - 14a + 48 = 0$, получаем: $a = 8$ или $a = 6$. Тогда $b = 6$ и $a = 8$ или $b = 8$ и $a = 6$. Площадь параллелограмма $S = 24\sqrt{3}$. Ответ: $S = 24\sqrt{3}$.

8. Найдите угол между касательными к графику функции $y = x^2/3$, проходящими через точку $M\left(\sqrt{3}; 3/4\right)$.

Решение. Уравнение касательной к графику заданной функции имеет вид $y = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}\left(x - x_0\right)$, где x_0 – абсцисса точки касания. Так как касательная проходит через точку M, $\frac{3}{4} = \frac{x_0^2}{3} + \frac{2x_0}{3}\left(\sqrt{3} - x_0\right)$; $x_0^2 - 2\sqrt{3}x_0 + 9/4 = 0$; $x_0 = \sqrt{3} \pm \sqrt{3}/2$; $\left(x_0\right)_1 = 3\sqrt{3}/2$, $\left(x_0\right)_2 = \sqrt{3}/2$. Угловые коэффициенты касательных:

1) $\mathrm{tg}\alpha_1 = \sqrt{3}, \quad \alpha_1 = 60^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = 30^\circ$. Угол между касательными: $\varphi = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Ответ: 30°.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $y = \frac{x+|x|}{x}$; $(x-a)^2 = y + a$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Решение. I. При $x > 0$ $y = 2, \quad x^2 - 2ax + a^2 - a - 2 = 0$ (*).

Уравнение (*) имеет два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a+2}$, если:

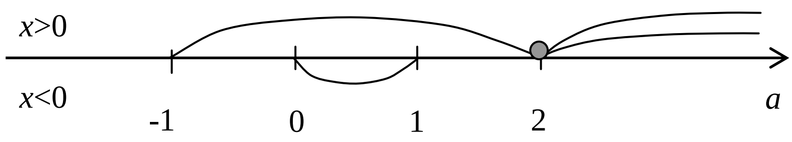
$$\begin{cases} D/4 = a + 2 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2, \\ a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > 2.$$

Уравнение (*) имеет один положительный корень $x_{1,2} = a + \sqrt{a+2}$, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ a^2 - a - 2 < 0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 2 \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < a \le 2.$$

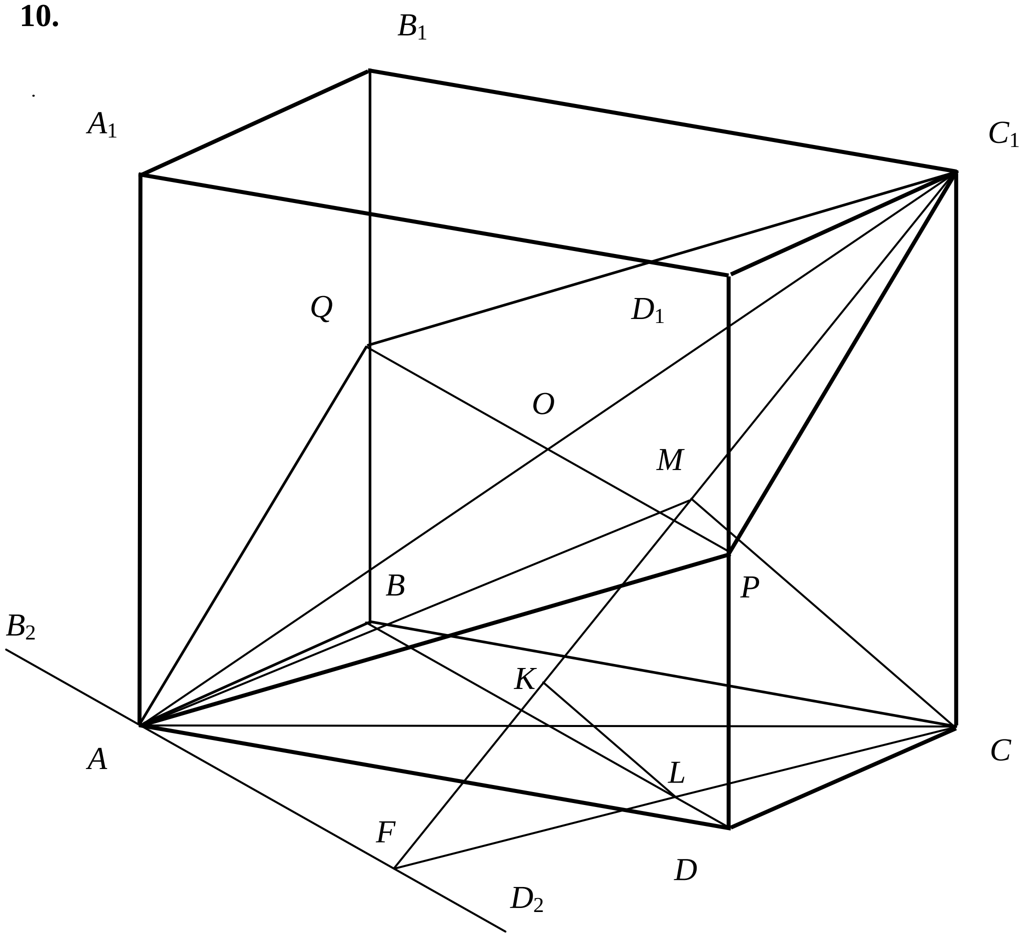
II. При $x < 0$, $y = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ (**). Уравнение (**) не может иметь двух отрицательных корней, так как система неравенств $\begin{cases} D/4 = a > 0, \\ a < 0, \\ a^2 - a > 0. \end{cases}$ решений не имеет. Уравнение (**) имеет один отрицательный корень $x = a - \sqrt{a}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D/4 = a = 0, \\ a < 0, \end{cases} \\ a^2 - a < 0, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1 \end{array}\right. \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < a < 1$$



Ответ: при $a\in(-1;0]\cup[1;2]$ $x=a+\sqrt{a+2},\ y=2$; при $a\in(0;1)$ $x_1=a+\sqrt{a+2},\ y_1=2;$ $x_2=a-\sqrt{a};\ y_2=0$, при $a\in(2;+\infty)$ $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a+2},\ y_{1,2}=2$.

10.



Проведем $(B_2D_2)\parallel BD,\ A\in(B_2D_2);\ CF\perp(B_2D_2),\ LK\perp C_1F,$ где $L=CF\cap BD$, и $CM\perp C_1F$. Тогда $FC_1\perp B_2D_2$ и $LK=l,\ CM=2l$. Обозначим $\alpha=\angle C_1AC$ и $\gamma=\angle CAM$; γ – угол, который диагональ основания AC образует с секущей плоскостью, и α – угол между AC и диагональю AC_1. Тогда $AC=BD=PQ=\dfrac{MC}{\sin\gamma}=\dfrac{2l}{\sin\gamma}$; $AC_1=\dfrac{AC}{\cos\alpha}=\dfrac{2l}{\cos\alpha\cdot\sin\gamma}$; $CC_1=AC\ \mathrm{tg}\alpha=\dfrac{2l\ \mathrm{tg}\alpha}{\sin\gamma}$. $MC_1=\sqrt{CC_1^2-MC^2}=\dfrac{2l}{\sin\gamma}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}$. $\dfrac{MC_1}{CC_1}=\dfrac{CC_1}{FC_1}$, отсюда

$FC_1=\dfrac{CC_1^2}{MC_1}$, т.е. $FC_1=\dfrac{2l\cdot \mathrm{tg}^2\alpha}{\sin\gamma\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}$. $S_{PAQC_1}=\dfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot FC_1=\dfrac{2l^2\mathrm{tg}^2\alpha}{\sin^2\gamma\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\gamma}}$. При $\gamma=30^\circ,\ \ \alpha=45^\circ$ $S_{PAQC_1}=\dfrac{16}{\sqrt{3}}l^2$.

Ответ: $S=16l^2/\sqrt{3}$.

Вариант № 1.2.

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 *км* больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94,…? (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sin 2x-\sin 4x=|\sin x|$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-1\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)}{x^2-11x+10}\le 0.$ (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x)=8\cos 6x+24\sin 3x-15$. (10 баллов)

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $BF=4$, $FD=3$, периметр треугольника BFC равен 10, угол BFC равен $\arcsin\sqrt{15/16}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y|=(x+2)(4-x),\ -2<x<4$, а стороны параллельны координатным осям? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений $(x-a)^2=8(y-x+a-2),\ \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{y}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ имеет два различных решения. Найдите эти решения. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды *TABC* служит прямоугольный треугольник *ABC,* а все боковые рёбра пирамиды равны *l*. Боковое ребро *TB* образует с гипотенузой основания *AB* угол 45°, а угол между *TB* и медианой основания *CD* равен 60°. Какую наименьшую

площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану *CD* и пересекающей ребро *TB?* (12 баллов)

Решения варианта №1.2

1. . За три часа один лыжник прошел на 2,5 *км* больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

Решение. $\frac{3\cdot 60}{x}=\frac{3\cdot 60}{x+1}+\frac{5}{2}$; $72x+72=72x+x^2+x$; $x^2+x-72=0$; $x=(-1\pm 17)/2$; $x=8$.

Ответ: за 8 и 9 минут.

2. . Решите уравнение $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$.

Решение. $2^x-6\cdot 2^{1-x}=1$, $(2^x)^2-2^x-12=0$; $2^x=(1\pm 7)/2$, $2^x=4$, $x=2$.

Ответ: $x=2$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94,…?

Решение. Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le 0$. Так как $a_n=a_1+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=[103/3]=34$.

Тогда $\max S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(100+100-3\cdot 33)\cdot 34=1717$.

Ответ: 1717.

4. Решите уравнение $\sin 2x-\sin 4x=|\sin x|$.

Решение. 1) При условии $\sin x\ge 0$ имеем $-2\sin x\cos 3x=\sin x$ $\Leftrightarrow$ $\sin x=0$ или $\cos 3x=-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. С учетом условия $\sin x\ge 0$ окончательно имеем $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{9}+2\pi n$, $x=\frac{4\pi}{9}+2\pi n$, $x=\frac{8\pi}{9}+2\pi n$, $n\in Z$.

2) При условии $\sin x<0$ имеем $-2\sin x\cos 3x=-\sin x$ $\Leftrightarrow$ $\sin x=0$ или $\cos 3x=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. С учетом условия $\sin x<0$ окончательно имеем $x=-\frac{\pi}{9}+2\pi n$, $x=-\frac{5\pi}{9}+2\pi n$, $x=-\frac{7\pi}{9}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{9}+\pi n$, $x=\frac{4\pi}{9}+\pi n$, $x=\frac{8\pi}{9}+\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-1\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)}{x^2-11x+10}\le 0.$

Решение. ОДЗ: $x\ne 1,\ x\ne 10,\ x\ge 0.$ Т.к. $\sin\dfrac{\pi x}{2}-1\le 0$, то $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)}{x^2-11x+10}\ge 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{(x-1)(x-10)}\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x\in[0;1)\cup(10;+\infty)$. Необходимо учесть решения уравнения $\sin\dfrac{\pi x}{2}-1=0$, принадлежащие ОДЗ. $\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z \ \Rightarrow\ x=1+4n,\ n\in Z$. С учетом ОДЗ имеем $x=1+4n,\ \ n\in N$.

Ответ: $x\in[0;\ 1)\cup(10;\ +\infty)\cup\{5;9\}$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=8\cos 6x+24\sin 3x-15$.

Решение:

$f(x)=8\cos 6x+24\sin 3x-15=8-16\sin^2 3x+24\sin 3x-15=-16\sin^2 3x+24\sin 3x-7=$
$=-(4\sin 3x-3)^2+2.$

Функция $t=4\sin 3x$ принимает значения $t\in[-4;\,4]$. Рассмотрим функцию $y=2-(t-3)^2$, определенную на отрезке $[-4;\,4]$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(3;\,2)$, ветви которой направлены вниз. Таким образом, максимальное значение y равно 2, оно достигается в точке $t=3$, минимальное значение функция принимает в точке $t=-4$, оно равно -47, и функция принимает все значения из промежутка $[-47;\,2]$.

Ответ: $E_f=[-47;\,2]$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F, причем $BF=4$, $FD=3$, периметр треугольника BFC равен 10, угол BFC равен $\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:

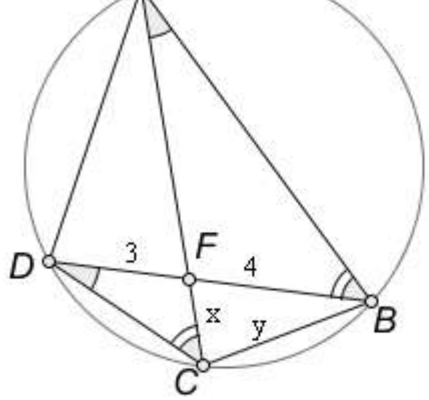
1) $\triangle BFC$ **:** $BF=4$, $CF=x$, $BC=y$

$P_{BFC}=10\ \Leftrightarrow\ x+y+4=10,$

По теореме косинусов

$y^2=x^2+16-2\cdot 4x\cos(\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{4})$.

Решим систему



$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ y^2 = x^2 + 16 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x = 2. \end{cases}$$

2) $BF = 4$, $CF = 2$, $BC = 4$. ABCD вписан в окружность $\Rightarrow$

$$\Delta\, ABF \approx \Delta\, DCF \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \quad \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FD} = 2.$$

Так как $FD = 3$, то $AF = 6$.

3) По теореме косинусов $AB^2 = BF^2 + AF^2 - 2 \cdot BF \cdot AF \cos(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}) \Rightarrow$

$$AB^2 = 16 + 36 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} = 64 \Rightarrow AB = 8 \Rightarrow P_{ABC} = 8 + 4 + 6 + 2 = 20$$

4) $S_{BFC} = \frac{1}{2} BF \cdot FC \sin BFC = \sqrt{15}$, $S_{AFB} = \frac{AF}{FC} S_{BFC} = 3\sqrt{15} \Rightarrow S_{ABC} = 4\sqrt{15}$.

5) $r_{\text{вп}ABC} = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

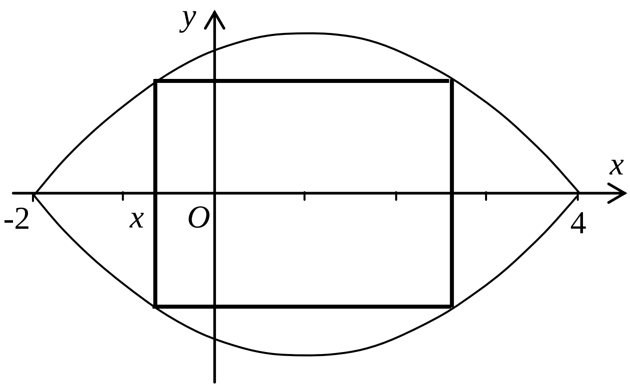
8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x+2)(4-x)$, $-2 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям?

Решение.

$S(x) = 2\big(6 - 2(x+2)\big)(x+2)(4-x) =$
$4(1-x)\left(8 + 2x - x^2\right) =$

$4\left(8 + 2x - x^2 - 8x - 2x^2 + x^3\right) =$

$4\left(x^3 - 3x^2 - 6x + 8\right)$.



$S'(x) = 4(3x^2 - 6x - 6) = 12\left(x^2 - 2x - 2\right)$

$S'(x) = 0$ при $x = 1 \pm \sqrt{3}$; нужно взять меньшее значение $x = 1 - \sqrt{3}$.

$$S_{\max} = S\left(1 - \sqrt{3}\right) = 4\left(1 - 1 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$ ед^2.

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\left(x - a\right)^2 = 8(y - x + a - 2), \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{y}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

имеет два различных решения. Найдите эти решения.

Решение.

Второе уравнение равносильно системе: $x > 0,\ x \neq 2,\ y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 8(a-2)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 16 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 8a - 16 = 8a - 16$.

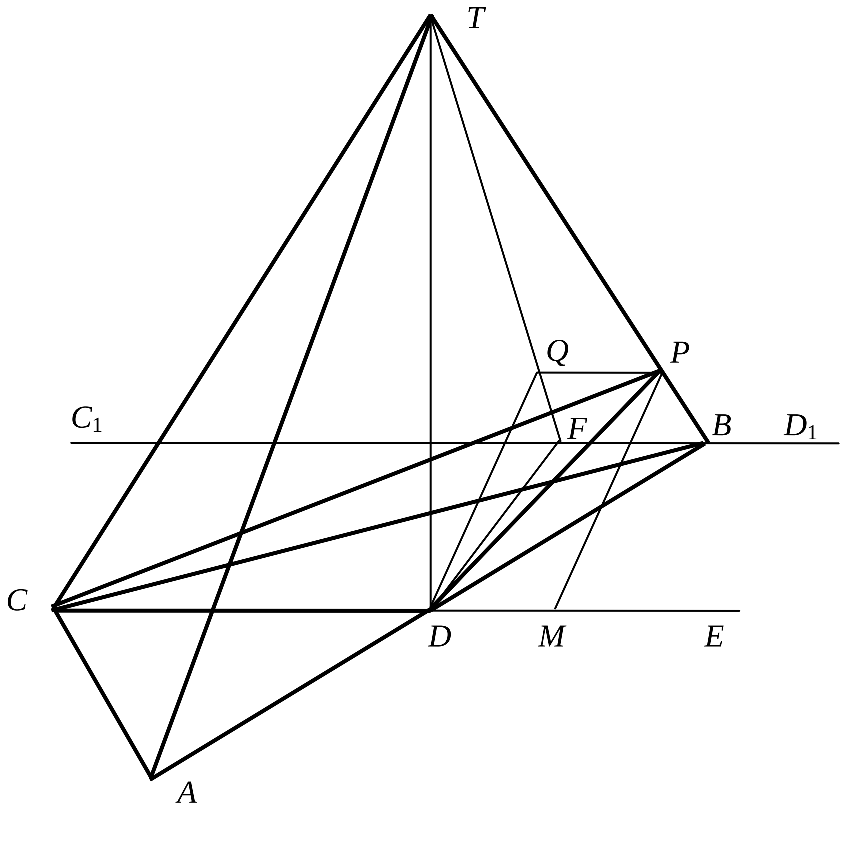
Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных, не равных 2, корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{8a-16}$, если

$$\begin{cases} 8a-16>0, \\ a>0, \\ a^2-8a+16>0, \\ 4-4a+a^2-8a+16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a\neq 4, \\ a^2-12a+20\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>2, \\ a\neq 2, \\ a\neq 4, \\ a\neq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<a<4, \\ 4<a<10, \\ 10<a<+\infty. \end{array} \right.$$

Ответ: $a \in (2;4) \cup (4;10) \cup (10;+\infty)$, $x = y = a \pm \sqrt{8a-16}$.

10. Основанием пирамиды *TABC* служит прямоугольный треугольник *ABC,* а все боковые рёбра пирамиды равны *l*. Боковое ребро *TB* образует с гипотенузой основания *AB* угол 45°, а угол между *TB* и медианой основания *CD* равен 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану *CD* и пересекающей ребро *TB?* Основание высоты пирамиды совпадает с серединой гипотенузы D.



Проведем $C_1D_1 \| CD, B \in C_1D_1$, $DF \perp C_1D_1, F \in C_1D_1$, $DQ \perp TF, Q \in TF$, $QP \| C_1D_1, P \in TB$ и $PM \| QD, M \in (CD)$. Треугольник CPD – искомое сечение, PM его высота, причем $PM = QD$. Так как $AT = BT = CT = l$, $TD = BD = AD = CD = l/\sqrt{2}$. $BF = BT \cdot \cos 60° = l/2$, $TF = BT \cdot \sin 60° = l\sqrt{3}/2$, $DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}$. $DQ = \frac{DF \cdot TD}{TF} = \frac{l \cdot l \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot l\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{6}} = PM$. $S_{\Delta CDP} = \frac{1}{2} CD \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{\sqrt{6}} = \frac{l^2}{4\sqrt{3}}$ ед^2.

Ответ: $S_{\Delta CDP} = \frac{l^2}{4\sqrt{3}}$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ № 2.1

1. Два спортсмена бегают по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях? (8 баллов)

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии. (8 баллов)

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x+\log_2 \frac{x^2}{8}=7^{(\log_{49} 4^{x+3}-\log_7 2^x)}$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $ctg\,6x\sqrt{2\sin 2x+1}=ctg\,10x\sqrt{2\sin 2x+1}$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $x-\sqrt[4]{y}-\sqrt{x^2+\sqrt{y}-9}\geq 3$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции

$f(x)=\log_{0,2}(4-\log_6 x)+\log_{0,2}(6+\log_6 x)$. (10 баллов)

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным $\arccos 0{,}6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$. (12 баллов)

8. На кривой $y=(x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^2+2x-1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние. (12 баллов)

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y+|y|=4\sqrt{x} \\ a(y-3)=x-2 \end{cases}$ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь

сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов).

Решения варианта №2.1

1. Два спортсмена бегают по одной замкнутой круговой трассе. Скорость каждого постоянна, а на пробег круга один тратит на 9 секунд меньше другого. Если они бегут в одном направлении, то один обгоняет другого ровно на круг за 3 минуты. Через какое время они будут встречаться, если побегут в противоположных направлениях?

Решение. За единицу измерения расстояния примем длину трассы. Пусть x (тр/сек) – скорость первого спортсмена, а y (тр/сек) – скорость второго. В таблице отметим пробег спортсменами всей трассы, движение с общей линии старта в одном направлении, а также в противоположных направлениях. Если они начинают бег с общего старта одновременно и в одном направлении, то через 3 минуты или 180 секунд более быстрый спортсмен пробежит расстояние на одну трассу большее, чем второй спортсмен. Если они побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях, то к моменту встречи пробегут расстояние в сумме равное длине одной трассы. В итоге, имеем таблицу:

v(тр/сек)	t (сек)	S (тр)
x	t	1
y	t+9	1
x	180	S+1
y	180	S
x	t_1	S_1
y	t_1	1-S_1

Необходимо найти t_1. Согласно таблице, получаем систему из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} xt=1, \\ y(t+9)=1, \\ 180x=S+1, \\ 180y=S, \\ xt_1=S_1, \\ yt_1=1-S_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\dfrac{1}{x}+9\right)=1, \\ 180x=180y+1, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{180x-1}{180}\left(\dfrac{1}{x}+9\right)=1, \\ y=\dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (180x-1)(1+9x)=180x, \\ y=\dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1620x^2-9x-1=0, \\ y=\dfrac{180x-1}{180}, \\ t_1(x+y)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{36}, \\ y=\dfrac{1}{45}, \\ t_1=\dfrac{1}{x+y}, \end{cases} \Rightarrow t_1=20.$$

Ответ: 20 секунд.

2. Количество членов геометрической прогрессии является четным числом. Сумма всех членов прогрессии в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение. Пусть количество членов геометрической прогрессии равно $2n$. Тогда сумма всех членов прогрессии определяется по формуле $S_{2n}=\dfrac{b_1(q^{2n}-1)}{q-1}$, а сумма членов, стоящих на нечетных местах $S_{нечет}=\dfrac{b_1(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. Так как $S_{2n}=5S_{нечет}$, то $q+1=5$. Следовательно, $q=4$. Ответ: 4.

3. Решите уравнение $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=7^{(\log_{49}4^{x+3}-\log_7 2^x)}$.

Решение. Преобразуем правую часть данного уравнения $7^{(\log_{49}4^{x+3}-\log_7 2^x)}=7^{(0,5\log_7 4^{x+3}-\log_7 2^x)}=7^{\log_7 2^{x+3-x}}=7^{\log_7 8}=8.$ Тогда исходное уравнение равносильно следующему $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\dfrac{x^2}{8}=8.$ Используя свойства логарифмов, имеем

$$(\log_{0,5}4+\log_{0,5}x)^2+\log_2 x^2-\log_2 8=8 \Leftrightarrow (2+\log_2 x)^2+2\log_2 x-11=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x+6\log_2 x-7=0 \Leftrightarrow \log_2 x=-7 \text{ или } \log_2 x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{128} \text{ или } x=2.$$

Ответ: $\dfrac{1}{128}$, 2.

4. Решите уравнение $ctg\,6x\sqrt{2\sin 2x+1}=ctg\,10x\sqrt{2\sin 2x+1}.$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(ctg\,6x-ctg\,10x)\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6x}{\sin 6x}-\frac{\cos 10x}{\sin 10x}\right)\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 6x\sin 10x-\cos 10x\sin 6x}{\sin 6x\sin 10x}\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 6x\sin 10x}\sqrt{2\sin 2x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0, \\ \sin 2x = -0{,}5, \end{array}\right. \\ \sin 6x \neq 0, \\ \sin 10x \neq 0, \\ \sin 2x \geq -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{4},\ n \in Z, \\ \sin\dfrac{3\pi n}{2} \neq 0, \\ \sin\dfrac{5\pi n}{2} \neq 0, \\ \sin\dfrac{\pi n}{2} \geq -0{,}5; \end{cases} \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 2m+1,\ m \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi m\right) \geq -0{,}5; \end{cases} \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z,\ (m = 2l) \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z, \quad (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

5. Решите неравенство $x - \sqrt[4]{y} - \sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} \geq 3.$

Решение. Имеем равносильное неравенство $x - \sqrt[4]{y} \geq \sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 3.$

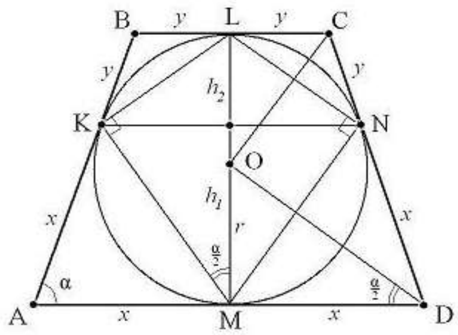
Так как правая часть неравенства неотрицательная, то левая часть удовлетворяет неравенству $x - \sqrt[4]{y} \geq 0$. Тогда $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0$, и $(x - \sqrt[4]{y})^2 \geq (\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 3)^2$, или $x^2 - 2x\sqrt[4]{y} + \sqrt{y} \geq x^2 + \sqrt{y} - 9 + 6\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9} + 9 \quad \Leftrightarrow \quad -x\sqrt[4]{y} \geq 3\sqrt{x^2 + \sqrt{y} - 9}.$ Так как левая часть последнего неравенства неположительная, а правая неотрицательная, то это неравенство выполняется только при условии $\begin{cases} x\sqrt[4]{y} = 0, \\ x^2 + \sqrt{y} - 9 = 0. \end{cases}$ Первое уравнение системы распадается на два уравнения: $x = 0$ или $y = 0$. Если $x = 0$, то из условия $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0$ следует $y = 0$, но точка $(0;0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы. Если $y = 0$. То из второго уравнения системы имеем $x^2 = 9$, с учетом условия $x \geq \sqrt[4]{y} \geq 0$ приходим к выводу, что $x = 3$. Итак, решением исходного неравенства является единственная точка $(3;0)$. Ответ: $(3;0)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_{0,2}(4 - \log_6 x) + \log_{0,2}(6 + \log_6 x).$

Решение. Пусть $y = f(x).$ Сделаем замену $t = \log_6 x.$ Тогда получим $y = \log_{0,2}(4 - t) + \log_{0,2}(t + 6), \quad t \in (-6;\ 4).$ Используя свойства логарифмов и выделяя полный квадрат, приходим к функции $y = \log_{0,2}((4 - t)(t + 6)) = \log_{0,2}(25 - (t + 1)^2),$ определенной при $t \in (-6;\ 4).$ Пусть $z = 25 - (t + 1)^2$. Тогда при $t \in (-6;\ 4)$ имеем

$z \in (0;\,25]$. Так как логарифмическая функция с основанием $0{,}2 < 1$ убывает, и $y = \log_{0,2} z,\quad z \in (0;\,25]$, то $y \in [\log_{0,2} 25;\,+\infty) = [-2;\,+\infty)$. Ответ: $E(y) = [-2;\,+\infty)$.

7. Около окружности радиуса 5 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с углом A, равным $\arccos 0{,}6$. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Найдите площади четырехугольников $AKND$ и $KBCN$.



Решение. По условию имеем $\angle A = \alpha = \arccos 0{,}6,\quad r = 5$, $ABCD$ - равнобокая трапеция, где r - радиус вписанной в трапецию окружности. Точки K и N - точки касания окружности с боковыми сторонами AB и CD, соответственно. Пусть точки M и L - точки касания окружности с основаниями AD и BC, соответственно. Тогда имеем $KN \parallel AD \parallel BC$, $AKND$ и $KBCN$ - трапеции. Пусть h_1 - высота $AKND$, h_2 - высота $KBCN$. Из свойств касательных к окружности имеем $AK = AM = x,\quad BK = BL = y.$

Тогда $\angle KML = \dfrac{\alpha}{2},\quad LM = H = 2r,\ \Delta KLM$ - прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$,

$$KM = 2r\cos\frac{\alpha}{2},\ KL = 2r\sin\frac{\alpha}{2},\ x = \frac{r}{tg\,\frac{\alpha}{2}},\quad y = r\,tg\,\frac{\alpha}{2},\quad h_2 = y\sin\alpha,\quad h_1 = x\sin\alpha.$$

Основания трапеций $AKND$ и $KBCN$ определяем по формулам $KN = 2(y + y\cos\alpha)$ или $KN = 2(x - x\cos\alpha)$, $AD = 2x,\quad BC = 2y.$

$$S_{AKND} = \frac{AD + KN}{2}h_1 = (2x - x\cos\alpha)x\sin\alpha = \frac{r^2(2-\cos\alpha)\sin\alpha}{tg^2\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{r^2(2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)},$$

$$S_{KBCN} = \frac{BC + KN}{2}h_2 = (2y + y\cos\alpha)y\sin\alpha = r^2(2+\cos\alpha)\sin\alpha\ tg^2\,\frac{\alpha}{2} =$$

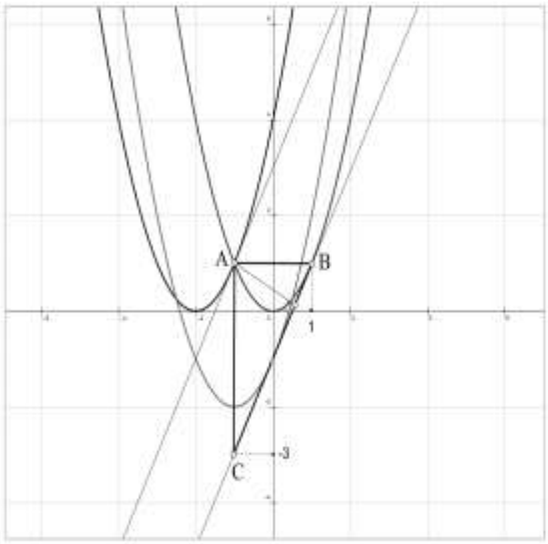
$$= \frac{r^2(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}.$$

$$S_{AKND} = \frac{r^2(2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)} = \frac{25(2-0{,}6)(1+0{,}6)0{,}8}{1-0{,}6} = 112.$$

$$S_{KBCN} = \frac{r^2(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)} = \frac{25(2+0{,}6)(1-0{,}6)0{,}8}{1+0{,}6} = 13.$$ Ответ: 112, 13.

8. На кривой $y=(x+2)^2$ найдите точку, расстояние от которой до общей касательной к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^2+2x-1$ будет наименьшим. Найдите это расстояние.

Решение. Найдем уравнения общей касательной к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^2+2x-1$. Уравнение касательной к графику функции $y=x^2$, абсцисса точки касания которой равна x_1 имеет вид $y=2x_1(x-x_1)+x_1^2$. Уравнение касательной к графику функции $y=x^2+2x-1$, абсцисса точки касания которой равна x_2 имеет вид $y=(2x_2+2)(x-x_2)+x_2^2+2x_2-1$. Так как две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$, имеем следующую систему уравнений с неизвестными x_1 и x_2 для уравнений совпадающих касательных:



$$\begin{cases} x_1=x_2+1, \\ x_1^2-x_2^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2+1, \\ (x_2+1)^2-x_2^2-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=0. \end{cases}$$

Тогда уравнение общей касательной $y=2x-1$.

Точка на кривой $y=(x+2)^2$, расстояние от которой до прямой $y=2x-1$ будет наименьшим, совпадает с той точкой, в которой касательная к графику функции $y=(x+2)^2$ будет параллельна этой прямой. Условие параллельности двух прямых совпадает с равенством их угловых коэффициентов. Угловой коэффициент касательной совпадает со значением производной в точке, равной абсциссе точки касания. Таким образом, приходим к уравнению $2(x_0+2)=2 \Leftrightarrow x_0=-1$. Итак, абсцисса искомой точки равна $x_0=-1$, ордината $y_0=1$. Обозначим эту точку $A=(-1;1)$. Пусть точка B - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси абсцисс, с прямой $y=2x-1$. Тогда $B=(1;1)$. Пусть точка C - точка пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно оси ординат, с прямой $y=2x-1$. Тогда $C=(-1;-3)$. Расстояние от точки A до прямой $y=2x-1$ совпадает с длиной высоты прямоугольного треугольника ABC, опущенной из вершины A. Таким образом, искомое расстояние d

можно найти из формулы $d=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$. Так как $AB=2$, $AC=4$, $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{5}$, то $d=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Ответ: $(-1;1)$, $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y+|y|=4\sqrt{x} \\ a(y-3)=x-2 \end{cases}$ имеет два различных решения. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a.

Решение. Рассмотрим два случая раскрытия модуля в первом уравнении системы.

I. Если $y\ge 0,$ то $y=2\sqrt{x},\quad a(2\sqrt{x}-3)=x-2$**.** Сделаем замену переменного $\sqrt{x}=t\ge 0$.

Получим следующее квадратное уравнение $t^2-2at+3a-2=0$**,** для которого

$\dfrac{D}{4}=(a-1)(a-2);\quad t_1+t_2=2a;\quad t_1t_2=3a-2$**.** Таким образом,

$$\text{два различных решения}:\begin{cases}(a-1)(a-2)>0\\ a>0\\ 3a-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left[\frac{2}{3};1\right)\cup(2;+\infty).$$

При $a\in\left[\dfrac{2}{3};1\right)\cup(2;+\infty)$ имеем решения: $\begin{cases}x_{1/2}=\left(a\pm\sqrt{a^2-3a+2}\right)^2\\ y_{1/2}=2a\pm2\sqrt{a^2-3a+2}\end{cases}$**.**

$$\text{Одно решение}:\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)(a-2)=0\\ a>0\end{cases}\\ \quad 3a-2<0\\ \begin{cases}3a-2=0\\ a<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\{1;\,2\}.$$

При $a\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\{1;\,2\}$ имеем решение: $\begin{cases}x=\left(a+\sqrt{a^2-3a+2}\right)^2\\ y=2a+2\sqrt{a^2-3a+2}\end{cases}$**.**

II. Если $y<0,$ то $x=0,\quad a(y-3)=-2,\quad y=3-\dfrac{2}{a}<0,\quad a\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right),\quad \begin{cases}x=0\\ y=3-\dfrac{2}{a}\end{cases}$

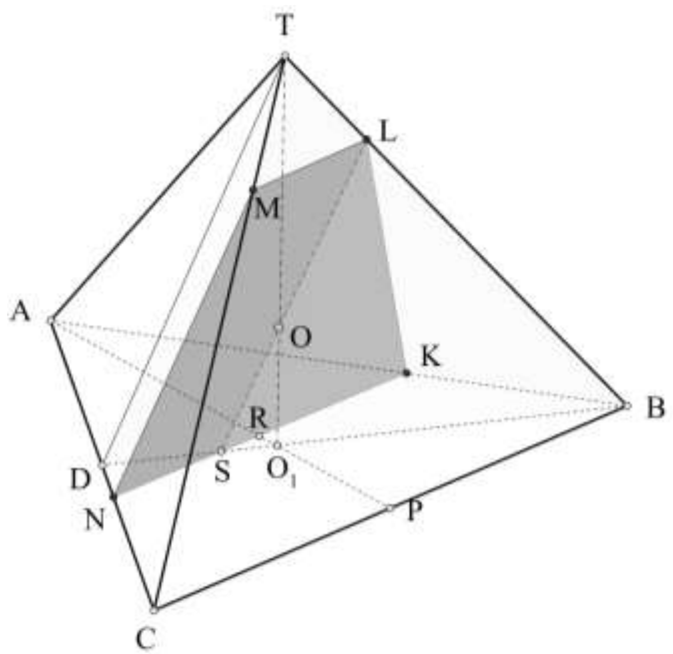
Ответ: при $a\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$ имеем 2 решения: $\begin{cases}x_1=\left(a+\sqrt{a^2-3a+2}\right)^2\\ y_1=2a+2\sqrt{a^2-3a+2}\end{cases}$**;** $\begin{cases}x_2=0\\ y_2=3-\dfrac{2}{a}\end{cases}$**;**

при $a\in\left[\dfrac{2}{3};1\right)\cup(2;+\infty)$ имеем 2 решение: $\begin{cases}x_{1/2}=\left(a\pm\sqrt{a^2-3a+2}\right)^2\\ y_{1/2}=2a\pm2\sqrt{a^2-3a+2}\end{cases}$**.**

10. Шар радиуса 1 с центром в точке O вписан в правильную треугольную пирамиду. Через точку O проходит плоскость, параллельная стороне основания пирамиды и апофеме, проведенной к другой стороне основания. Найдите площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до этой плоскости равно $1/\sqrt{13}$ (12 баллов)

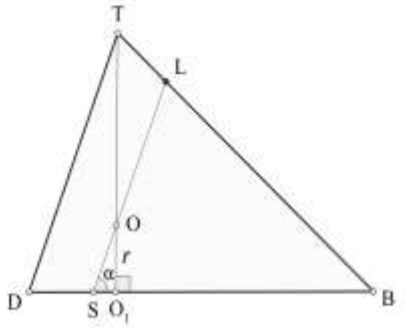
Решение. Обозначим расстояние от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение, $d = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$**,** радиус вписанного шара $r = 1$.

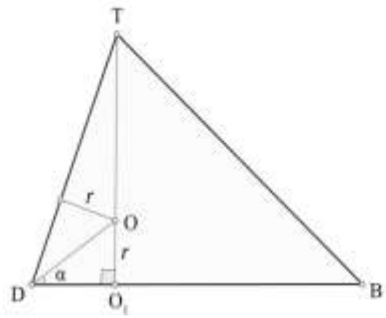
Опишем построение сечения. Центр O вписанного шара лежит на высоте TO_1 правильной треугольной пирамиды $TABC$. Пусть TD апофема пирамиды, поведенная к стороне AC. В плоскости TBD через точку O проведем прямую SL, параллельную TD, $S = DB \cap SL$, $L = TB \cap SL$. Через точку S в плоскости основания проведем прямую NK, параллельную стороне основания CB, $N = AC \cap NK$, $K = AB \cap NK$. Соединяем точки K и L. Через точку L в плоскости TBC проводим прямую ML, параллельную стороне основания CB, $M = TC \cap ML$. Соединяем точки N и M. Трапеция $KLMN$ искомое сечение пирамиды. Найдем его площадь. Пусть a - длина стороны основания пирамиды.



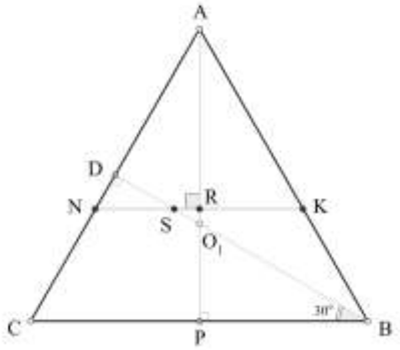
1) $\angle ODO_1 = \alpha$**,** $\angle TDO_1 = 2\alpha$**,** $OO_1 = r$**,** $tg\alpha = \dfrac{r}{O_1D} = \dfrac{6r}{\sqrt{3}a} = \dfrac{6}{\sqrt{3}a}$**.**

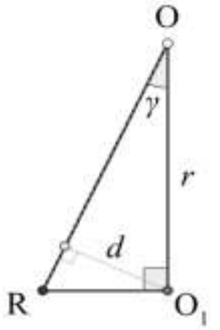
2) $TD \parallel SL$**,** $\angle OSO_1 = \angle TDO_1 = 2\alpha$**,** $SO_1 = \dfrac{r}{tg2\alpha} = \dfrac{r(1 - tg^2\alpha)}{2tg\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}(a^2 - 12)}{12a}$**.**





3) AP и BD - медианы основания пирамиды, O_1 - точка их пересечения, R - точка пересечения AP и NK **,** $\angle DBC = \angle RSO_1 = 30°$**,** $O_1R = \dfrac{SO_1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}(a^2-12)}{24a}$**,** $DO_1 = \dfrac{1}{3}BD = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$





4) Длина высоты прямоугольного треугольника OO_1R, проведенной из вершины прямого угла O_1, совпадает с расстоянием от центра описанной около основания пирамиды окружности до плоскости, содержащей сечение. Пусть $\angle OO_1R = \gamma$ **.** Тогда

$$\sin\gamma = \frac{d}{r} = \frac{O_1R}{\sqrt{r^2 + O_1R^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}(a^2-12)}{\sqrt{576a^2 + 3(a^2-12)^2}},\quad 4a = a^2 - 12,\quad a = 6$$

5) $DS = O_1D - SO_1 = \dfrac{\sqrt{3}a}{6} - \dfrac{\sqrt{3}(a^2-12)}{12a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$**,**

$BS = 3O_1D - DS = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$**.**

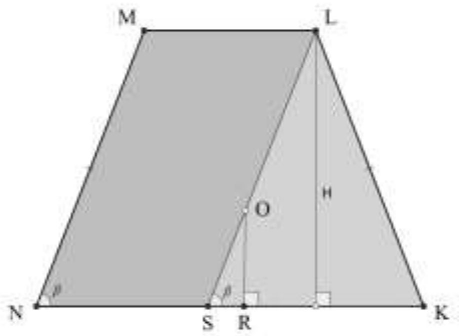
В треугольнике TBD имеем $TD \parallel SL \;\Rightarrow\; \dfrac{DS}{BS} = \dfrac{TL}{LB}$**,** $\dfrac{DS}{BS} = \dfrac{2}{7}$**,** $\dfrac{TL}{LB} = \dfrac{2}{7}$**.**

В треугольнике TBD имеем $ML \parallel CB \;\Rightarrow\; \dfrac{ML}{CB} = \dfrac{TL}{TB} = \dfrac{2}{9} \;\Rightarrow\; ML = \dfrac{2a}{9} = \dfrac{4}{3}$**.**

6) $O_1R = \dfrac{SO_1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $\quad SR = \dfrac{\sqrt{3}SO_1}{2} = \dfrac{1}{2}$**,** $AR = AO_1 - O_1R = \dfrac{\sqrt{3}a}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{11\sqrt{3}}{6}$**.**

Так как $NK \parallel CB$, то $\frac{NK}{CB} = \frac{AR}{AP} = \frac{2AR}{\sqrt{3}a} = \frac{11}{18} \Rightarrow NK = \frac{11}{3}$.

7) $OR = \sqrt{r^2 + O_1R^2} = \frac{\sqrt{39}}{6}$.



8) $\angle MNK = \angle OSR = \beta$, $tg\beta = \frac{OR}{SR} = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

9) $H = \frac{NK - ML}{2} tg\beta = \frac{7}{18}\sqrt{39}$.

10) $S_{сеч} = \frac{NK + ML}{2} H = \frac{35}{36}\sqrt{39}$.

Ответ: $S_{сеч} = \frac{35}{36}\sqrt{39}$.

Вариант № 2.2

1. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 *км*, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 *км*. Найдите расстояние между пунктами A и B. (8 баллов)

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35} = 2,\ a_{40} = 17$? (8 баллов)

3. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3) = \log_2 3$. (8 баллов)

4. Решите уравнение $\sqrt{-4\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x - \sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}\sin x$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{5\cdot 3^{-x} - 5}{3 + \sqrt{x+1}} \ge \frac{3^{-x} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x}$. (10 баллов)

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 4, углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Длина отрезка MN равна 5. Найдите длины оснований BC и AD, если площадь трапеции $ABCD$ равна $4\sqrt{15}$. (12 баллов)

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$y-4=a(x-2), \quad \frac{2y}{|x|+x}=\sqrt{y}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $60°$. (12 баллов)

Решения варианта №2.2

1. Из пункта *A* в пункт *B* одновременно выехали два велосипедиста. Когда первый велосипедист проехал половину пути, второму осталось проехать 24 *км*, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать 15 *км*. Найдите расстояние между пунктами *A* и *B*.

Решение. Пусть s – расстояние между пунктами *A* и *B*, v_1, v_2 – скорости велосипедистов. Тогда $\frac{s}{2v_1}=\frac{s-24}{v_2}$ и $\frac{s-15}{v_1}=\frac{s}{2v_2}$. Отсюда $\frac{s}{2(s-24)}=\frac{(s-15)\cdot 2}{s}$; $s^2=4s^2-4\cdot 39s+60\cdot 24$; $s^2-52s+480=0$; $s_{1,2}=26\pm 14$. $s_1=40$, $s_2=12$ не удовлетворяет условиям задачи $s>15,\ s>24$. Ответ: 40 км.

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35}=2,\ a_{40}=17$?

Решение. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a+34d=2, \\ a+39d=17 \end{cases} \Leftrightarrow d=3,\ a=-100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\ge 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-100+3(n-1)<0$ найдем $n=[103/3]=34$.

Тогда $\min S_n=S_{34}=0,5\cdot(-100-100+3\cdot 33)\cdot 34=-1717$. Ответ: –1717.

3. Решите уравнение $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3)=\log_2 3$.

Решение. $(\log_3 x)\cdot\log_4(x/3)=\log_2 3$; $\frac{\log_3(x/3)}{2\log_3 2}\cdot\log_3 x=\frac{1}{\log_3 2}$;

$\left(\log_3 x-1\right)\log_3 x=2$; $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$. 1) $\log_3 x=-1,\quad x=1/3$,

2) $\log_3 x=2,\quad x=9$. Ответ: $\{1/3;9\}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{-4\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}}=\sqrt[4]{12}\sin x$.

Решение. При условии $\sin x\ge 0$ возводим в квадрат обе части уравнения:

$-4\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin^2 x \Leftrightarrow -4\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow$

$\sin 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\quad x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z$. С учетом условия $\sin x\ge 0$ окончательно имеем $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. Решите неравенство $\dfrac{5\cdot 3^{-x}-5}{3+\sqrt{x+1}}\ge\dfrac{3^{-x}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. $\dfrac{5\cdot 3^{-x}-5}{3+\sqrt{x+1}}\ge\dfrac{3^{-x}-1}{\sqrt{x+1}-1} \Leftrightarrow (3^{-x}-1)\left(\dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}\right)\ge 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{-x}\ge 1,\\ \dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}\ge 0, \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}3^{-x}\le 1,\\ \dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}\le 0, \quad (2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0,\\ \dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}\ge 0, \quad (1)\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ \dfrac{5}{3+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}\le 0, \quad (2)\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим неравенство (1). Замена: $\sqrt{x+1}=t\ge 0,\ x=t^2-1$

$$\frac{5}{3+t}-\frac{1}{t-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{5t-5-3-t}{(t+3)(t-1)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{4t-8}{(t+3)(t-1)}\ge 0 \overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow} t\in[0;1)\cup[2;\infty).$$

$x+1\in[0;1)\cup[4;\infty)\Leftrightarrow x\in[-1;0)\cup[3;\infty)$

Решим неравенство (2). Замена: $\sqrt{x+1}=t\ge 0,\ x=t^2-1$

$$\frac{5}{3+t}-\frac{1}{t-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{5t-5-3-t}{(t+3)(t-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{4t-8}{(t+3)(t-1)}\le 0 \overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow} t\in(1;2].$$

$x+1\in(1;4]\Leftrightarrow x\in(0;3]$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0,\\ x\in[-1;0)\cup[3,\infty),\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x\in(0;3],\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x\in[-1;0)\cup(0;3]$$

Ответ: $x\in[-1;0)\cup(0;3]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_2\dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{1-\sin 3x}$.

Решение. $f(x)=\log_2\dfrac{\cos 2x+2\sin^2 x}{1-\sin 3x}=\log_2\dfrac{1}{1-\sin 3x}$.

Функция $t=\sin 3x$ принимает значения $t\in[-1;1]$. Рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1;1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t=1$ и $z=0$. Функция $z=\dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1;1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\dfrac{1}{2}$, оно достигается в точке $t=-1$, и функция $z=\dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1;1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$. Функция $y=\log_2 z$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_2\dfrac{1}{2};\infty\right)=[-1;\infty)$. Ответ: $E_f=[-1;\infty)$.

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 4, углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D – в точке N. Длина отрезка MN равна 5. Найдите длины оснований BC и AD, если площадь трапеции $ABCD$ равна $4\sqrt{15}$.

Решение. Проведем биссектрисы углов AM и BM углов A и B соответственно. Так как $\angle A+\angle B=180°$, то треугольник ABM прямоугольный, $\angle AMB=90°$. Пусть L — точка пересечения BM с основанием AD. Тогда треугольник ABL равнобедренный, так как AM является биссектрисой и высотой, $AB=AL=2$. Пусть P — точка пересечения биссектрисы CN с основанием AD. Тогда, рассуждая аналогично, получаем, что треугольник DCP равнобедренный, $CD=DP=4$. Точка L лежит между точками A и P, поскольку в противном случае $AL+DP\le 6$, при этом $AL+DP\ge 2MN=10$ (углы A и D острые). Так как $BM=ML$, а $CN=NP$, то MN — средняя линия трапеции $BLPC$.

Средняя линия трапеции $ABCD$ равна $\dfrac{AL}{2}+MN+\dfrac{DP}{2}=8$. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна h. По условию имеем $S_{ABCD}=8h=4\sqrt{15}$, $h=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$. Пусть BK и CS — высоты трапеции $ABCD$. Тогда $AK=\sqrt{4-h^2}=\dfrac{1}{2}$, $DS=\sqrt{16-h^2}=\dfrac{7}{2}$. Пусть $BC=x$,

$AD = AK + x + DS = 4 + x$. С другой стороны, $AD = AL + 2MN - x + DP = 16 - x$. Имеем $4 + x = 16 - x \Rightarrow x = 6$. Итак, $BC = 6$, $AD = 4 + x = 10$. Ответ: 6 и 10.

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy, расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x, а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \le x_0 \le 1$?

Решение. $y = x^2 + 16, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$.

Уравнение касательной:

$y = x_0^2 + 16 + 2x_0\left(x - x_0\right)$, или

$y = -x_0^2 + 16 + 2x_0 x$.

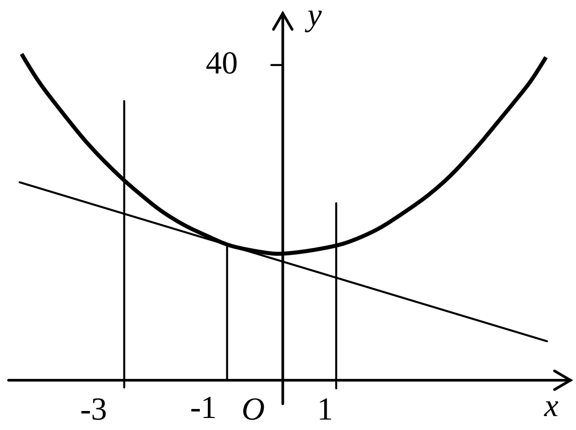
$y_1 = y\left(x_1\right) = -x_0^2 + 16 + 2x_0\left(-3\right)$;

$y_2 = y\left(x_2\right) = -x_0^2 + 16 + 2x_0 \cdot 1$. Так как

$\min y_1 = y_1\left(x_2\right) = -1 + 16 - 6 = 9 > 0$;

$\min y_2 = y_2\left(x_1\right) = -9 + 16 - 6 = 1 > 0$,

полученная фигура – трапеция, площадь которой равна



$S\left(x_0\right) = 0{,}5\left(y_1 + y_2\right)\ \left(x_2 - x_1\right) = \left(-x_0^2 + 16 - 2x_0\right)4$. $S'\left(x_0\right) = 4\left(-2x_0 - 2\right) = 0, \quad x_0 = -1$.

$\max S\left(x_0\right) = S\left(-1\right) = 4\left(-1 + 16 + 2\right) = 68$

9. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$y - 4 = a(x - 2), \quad \dfrac{2y}{|x| + x} = \sqrt{y}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

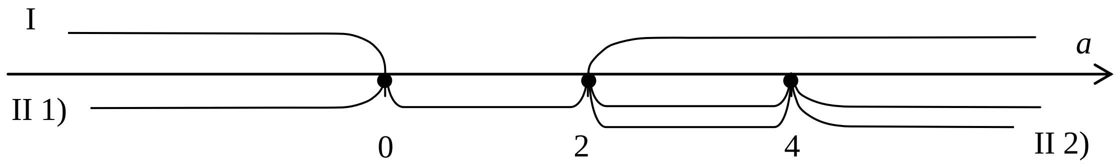
Решение. ОДЗ: $x > 0, \ y \ge 0$.

В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $y = x\sqrt{y}$.

I. $y = 0, \ x = 2 - \dfrac{4}{a} = \dfrac{2a - 4}{a} > 0$, отсюда $\left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 2. \end{array}\right.$

II. $y > 0, \ y = x^2, \ x > 0$; $\left(x - 2\right)\left(x + 2\right) = a\left(x - 2\right)$. 1) $x = 2, \ y = 4, \ a \in R$.

2) $x + 2 = a, \ x = a - 2 > 0, \ a > 2$. Найденное решение $x = a - 2, \ y = (a - 2)^2$ совпадает с предыдущим, если $2 = a - 2, \ a = 4$. Итак, при $a \in \left(2;4\right) \cup \left(4;+\infty\right)$ $x = a - 2, \ y = \left(a - 2\right)^2$.



Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$, $x_1 = 2 - 4/a$, $y_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$; $a \in [0; 2]$, $x = 2$, $y = 4$;

$$a \in (2;4) \cup (4;+\infty),\ x_1 = 2 - 4/a,\ y_1 = 0;\ x_2 = 2,\ y_2 = 4;\ x_3 = a - 2,\ y_3 = (a-2)^2.$$

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $60°$.

Решение. Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания E; $OE = AT/2$. Расстояние от точки E до линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания $EL = OE \cdot \mathrm{ctg}\angle OLE$. Во всех вариантах условия подобраны так, что $EL = AB/6$, т.е., длина EL равна расстоянию от точки E до прямой MP, а тогда линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания есть MP, причем $MP \parallel AD$. Проведем $ON \parallel AD,\ N \in TA,\ TN = AN$. Так как $ON \parallel MP$, ON лежит в секущей плоскости. Продолжим MP до пересечения с прямой AC в точке F, затем FN – до пересечения с ребром TC в точке Q. Четырехугольник $MNQP$ – искомое сечение. Для определения положения точки Q проведем $AG \parallel NQ,\ G \in TC$; из $TN = AN$ следует $TQ = QG$. Так как $AF = AM = 1/3\,AC$, $QG = 1/3\,CG$. Следовательно, $TQ = 1/5\,TC$ и $AH = 1/5\,AC$, где H – проекция Q на плоскость основания. Обозначим $AB = a,\ TA = h$. Из подобия $FN : FQ = AN : HQ$ получим $FN : FQ = (1/2\,h) : (4/5\,h) = 5 : 8$. Пусть $AK \perp FM$, тогда $NK \perp FM$. Из $FK = KM = 1/2\,MP$ следует $FM = 1/2\,FP$. Площадь треугольника FNM $S_{\Delta FNM}$ составляет $(5/8)\cdot(1/2) = 5/16$ площади треугольника FQP $S_{\Delta FQP}$, следовательно, площадь сечения $S_{MNQP} = 11/5\,S_{\Delta FNM}$. Так как $AK = PD = 1/6\,a$, $FM = 2\sqrt{3}\,AK = a\sqrt{3}/3$ и $NK = \sqrt{AK^2 + AN^2} = \sqrt{(a/6)^2 + (h/2)^2} = \sqrt{a^2 + 9h^2}/6$,

$$S_{\Delta FNM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+9h^2}}{6} = \frac{a\sqrt{a^2+9h^2}}{12\sqrt{3}} \text{ и } S_{MNQP} = \frac{11a\sqrt{a^2+9h^2}}{60\sqrt{3}}.$$

Решение с помощью проектирования сечения на основание пирамиды. Площадь проекции сечения

$$S_{MAHP}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BMP}-S_{\Delta CHP}=\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)S_{\Delta ABC}=\frac{11}{45}S_{\Delta ABC}=\frac{11\sqrt{3}\,a^2}{180},$$

$\cos\angle NKA=\dfrac{AK}{NK}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+9h^2}}$, $S_{MNQP}=S_{MAHP}/\cos\angle NKA$. Ответ: $S_{MNQP}=11\sqrt{3}/30$